SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

E. Obrecht

SPAZIO DELLE FASI PER UNA EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL SECONDO ORDINE IN UNO SPAZIO DI BANACH

3 Maggio 1990

1. INTRODUZIONE

Negli ultimi anni sono stati pubblicati moltissimi lavori sulle equazioni differenziali di ordine 2 o superiore in uno spazio di Banach. Nella maggior parte di questi lavori la trattazione consiste nel trasformare l'equazione in un sistema del primo ordine e quindi esaminare la possibilità che l'operatore matriciale così ottenuto generi un semigruppo.

Questo tipo di approccio presenta subito dei problemi:

- l'operatore matriciale ottenuto può, anche in casi "buoni", non essere chiuso;
- anche se chiuso, l'operatore matriciale di solito non genera un semigruppo, perchè il suo operatore risolvente non ha decrescenza massimale.

Per ovviare a questi inconvenienti sono state utilizzate tecniche diverse.

Agmon e Nirenberg [1] trasformano in sistema il problema "concreto" e quindi osservano che il risolvente dell'operatore matriciale così ottenuto ha il comportamento richiesto non su tutto lo spazio, ma solo su di un opportuno sottospazio chiuso: in tal modo si possono ugualmente ottenere un certo numero di risultati. Tale tecnica è stata successivamente utilizzata anche da Grisvard [3] e Lagnese [5].

Una seconda tecnica, utilizzata soprattutto da autori russi, consiste nel

fare una riduzione a sistema di tipo particolare, sfruttando il tipo particolare di equazione considerato. Con questa tecnica, ma sotto ipotesi abbastanza restrittive, Yakubov [10] ha ottenuto risultati abbastanza precisi nel caso parabolico.

In anni molto più recenti, è stata introdotta da Arendt e Neubrander [6] l'utilizzazione della teoria dei semigruppi integrati che non ritengo però possa dare, a causa della sua generalità, risultati molto precisi.

E' stata invece trascurata completamente l'applicazione a equazioni generali dell'idea di Kisynski [4], sviluppata in seguito in maniera sistematica da Fattorini [2] e M. Watanabe [9], di esaminare l'equazione

$$u'' = Au = 0 \tag{1}$$

non nello spazio prodotto $X \times X$, dove X è lo spazio di Banach ambiente, bensì in uno spazio $V \times X$, dove V è uno spazio di Banach opportuno, immerso con continuità in X. In particolare, Kisynski mostra che, se $-A$ genera una funzione coseno astratta e si sceglie

$$V = \{x \in X \mid t \to C(t)x \text{ è di classe } C^{(1)}\},$$

L'operatore matriciale ricavato dalla (1) genera un gruppo fortemente

continuo.

L'idea di considerare il sistema ottenuto in uno spazio più piccolo di $X \times X$ è del tutto naturale; infatti, poichè nel primo fattore assume i suoi valori la funzione soluzione e nel secondo la sua derivata, è del tutto innaturale pensare che queste assumano i loro valori nello stesso ambiente.

Nel seguito esporrò i primi risultati da me ottenuti in questa direzione per equazioni generali del secondo ordine; analoghi risultati, formalmente più complicati, valgono per equazioni di ordine n [8].

2. NOTAZIONI E PRELIMINARI

Siano X uno spazio di Banach, A e B due operatori lineari e chiusi in X. Vogliamo studiare l'equazione differenziale

$$u'' + Bu' + Au = f , \tag{2}$$

dove la funzione incognita u e il dato f assumono i loro valori in X.

Posto

$$a = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & -B \end{pmatrix} , \tag{3}$$

$v = \binom{u}{u'}$, l'equazione (2) si trasforma, almeno formalmente, nel sistema

$$v' = av + \binom{0}{f}.$$

L'operatore a, di dominio $\mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(B)$, non è però in generale chiuso in $X \times X$. In molti casi, a è chiudibile; per questo motivo molti Autori evitano il problema, dimostrando che $\bar{a}$ ha certe proprietà, per es. genera un semigruppo. E' però chiaro che il dominio di $\bar{a}$ non è certo facile a determinarsi.

Il seguente risultato fornisce una semplice condizione affinché l'operatore matriciale a sia chiuso.

Proposizione 1. Sia V uno spazio di Banach, contenuto e immerso con continuità in X. Se $V \subset \mathcal{D}(B)$, l'operatore A, di dominio $\mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(B)$ e definito dalla (3), è chiuso in $V \times X$.

Il fatto che, con questa scelta dello spazio delle fasi, si può prendere come dominio di a l'insieme $\mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(B)$ fa sì che le soluzioni che otterremo per l'equazione (2) sono soluzioni classiche di quell'equazione, contrariamente a ciò che accade se si è costretti a prendere la chiusura di un operatore definito dalla (3).

Nelle ipotesi della Prop. 1, l'operatore a è chiuso; ci si può pertanto

chiedere se esso ha insieme risolvente non vuoto.

Siano allora $f = (f_1,f_2) \in V\times X$, $u = (u_1,u_2) \in \mathcal{D}(a)$, tali che

$$(\lambda\text{-}a)u = f\,.$$

Si avrà

$$\begin{cases}\lambda u_1 - u_2 = f_1\\ Au_1+(\lambda+B)u_2 = f_2\end{cases}.$$

Poichè $f_1 \in V \subset \mathcal{D}(B)$, $u_1 \in V \cap \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(A)$, risulterà

$$\begin{cases}u_2 = \lambda u_1 - f_1\\ (\lambda^2+\lambda B+A)u_1 = f_2 + (\lambda+B)f_1\end{cases}.$$

Se $\exists\ p^{-1}(\lambda) \equiv (\lambda^2 + \lambda B + A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, sarà possibile determinare u in modo univoco:

$$\begin{cases}u_1 = p^{-1}(\lambda)((\lambda+B)f_1+f_2)\\ u_2 = \lambda p^{-1}(\lambda)((\lambda+B)f_1+f_2)-f_1\end{cases},$$

onde $\exists(\lambda\text{-}a)^{-1}$, definito da:

$$(\lambda\text{-}a)^{-1} = \begin{pmatrix} p^{-1}(\lambda)(\lambda+B) & p^{-1}(\lambda) \\ \lambda p^{-1}(\lambda)(\lambda+B)-I & \lambda p^{-1}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Non è difficile mostrare che $(\lambda\text{-}a)^{-1}$ è continuo da $V\times X$ in sè e che l'esistenza di $p^{-1}(\lambda) \in \mathfrak{L}(X)$ è anche condizione necessaria per l'esistenza e la limitatezza di $(\lambda\text{-}a)^{-1}$.

3. IL SISTEMA DEL I ORDINE

E' ben noto che una condizione necessaria affinchè un operatore chiuso S generi un semigruppo è che esistano ω, $M \in \mathbf{R}^+$, tali che $]\omega,+\infty[$ sia contenuto nell'insieme risolvente di S e che risulti $\|(S-\lambda)^{-1}\| \leq M\,\lambda^{-1}$, $\forall\lambda > \omega$.

Questa condizione applicata alla seconda colonna dell'operatore a introdotto nel paragrafo precedente fornisce il seguente risultato.

Proposizione 2. Se a genera un semigruppo in $V\times X$, allora $\exists\omega \in \mathbf{R}$, $M \in \mathbf{R}^+$, tali che:

i) $\exists p^{-1}(\lambda) \in \mathfrak{L}(X)$, $\forall\lambda \in\ ]\omega,+\infty[$;

ii) $\|p^{-1}(\lambda)\|_{\mathfrak{L}(X)} \leq M\,\lambda^{-2}$, $\forall\lambda \in\ ]\omega, +\infty[$,

$\|p^{-1}(\lambda)\|_{\mathfrak{L}(X,V)} \leq M\,\lambda^{-1}$, $\forall\lambda \in\ ]\omega,+\infty[$.

E' però molto facile mostrare che le ipotesi delle Proposizioni 1 e 2 non sono sufficienti a garantire che a sia il generatore di un semigruppo.

Infatti, siano X uno spazio di Hilbert, A un operatore autoaggiunto positivo, B=0 e scegliamo V=X. E' evidente che, in tal caso, le ipotesi delle Proposizioni 1 e 2 sono soddisfatte, ma l'operatore matriciale a non genera un semigruppo. Infatti, $\exists\ (\lambda^2+A)^{-1} \in \mathfrak{L}(X)$, $\forall\lambda\in \mathbf{C}$, Re $\lambda>0$, ma

$$\lambda^2(\lambda^2+A)^{-1} - I = -A(\lambda^2+A)^{-1}$$

non si maggiora in norma con $M|\lambda|^{-1}$, per un $M\in \mathbf{R}^+$.

E' invece ben noto che, nelle ipotesi fatte, -A genera una funzione coseno astratta e, quindi, il problema di Cauchy per l'equazione $u'' + Au = 0$ è ben posto.

Ritornando al caso generale, osserviamo che, se $\exists\ p^{-1}(\lambda) \in \mathfrak{L}(X)$, $\forall\lambda \in \Sigma$, dove Σ è un sottoinsieme non limitato di $\mathbf{C}$, se V è contenuto, algebricamente e topologicamente, in $\mathfrak{D}(B)$ ed $\exists\ M \in \mathbf{R}^+$, tale che

$$\|p^{-1}(\lambda)\|_{\mathfrak{L}(X)} \leq M|\lambda|^{-2}\ ,\ \|p^{-1}(\lambda)\|_{\mathfrak{L}(X,V)} \leq M|\lambda|^{-1},$$

$\forall\lambda \in \Sigma$, allora $\exists(\lambda-a)^{-1} \in \mathfrak{L}(X)$, $\forall\lambda\in\Sigma$; inoltre, gli elementi di posto (1,1), (1,2) e (2,2) nella matrice che definisce $(\lambda- a)^{-1}$ sono $0(|\lambda|^{-1})$ per $|\lambda| \to +\infty$.

Invece, come abbiamo già rilevato, la norma in $\mathfrak{L}(V,X)$ del termine di

posto (2,1) in generale non ha decrescenza massimale.

Si ha però il seguente risultato.

Teorema 1. Sia V uno spazio di Banach immerso con continuità in $\mathcal{D}(B)$ e sia Σ un sottoinsieme illimitato di $\mathbf{C}$. Supponiamo che, $\forall\lambda \in \Sigma$, $\exists\, p^{-1}(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$ e che $\exists M \in \mathbf{R}^+$, tale che:

$$\|p^{-1}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M|\lambda|^{-2}\,,\ \|p^{-1}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X,V)} \leq M|\lambda|^{-1},\ \ \forall\lambda \in \Sigma\,.$$

Supponiamo infine che la terna di spazi di Banach $(\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B), V, X)$ soddisfi la seguente ipotesi di tipo Brézis-Fraenkel indebolita:

$$\exists M_1,\ t_0 \in \mathbf{R}^+,\ \text{tali che},\quad \forall x \in V,$$

(4)

$$L(t,x) \leq M_1,\quad \forall t \in\ ]0,t_0[,$$

dove $L(t,x) = \inf\{L(t,x,\rho) | \rho \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)\}$,

$$L(t,x,\rho) = t\|\rho\|_{\mathcal{D}(A)\cap\mathcal{D}(B)} + \|x-\rho\|_V + t^{-1}\,\|x-\rho\|_X.$$

Allora $\exists(\lambda-a)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, $\forall\lambda \in \Sigma$, ed $\exists$ K, $r \in \mathbf{R}^+$, tali che

$$\|(\lambda-a)^{-1}\|_{\mathfrak{L}(X\times V)} \leq K\,|\lambda|^{-1},\ \forall\lambda\in\Sigma,\ |\lambda|>r.$$

Dimostrazione. Rimane solo da provare che

$$\|p^{-1}(\lambda^2+\lambda B)x-x\|_X \leq K\,\|x\|_V,$$

$\forall x\in V$ e $\forall\lambda\in\Sigma$.

Sia $x\in V$; per la (4), se $\lambda\in\Sigma$, $|\lambda|>t_0^{-1}$, $\exists\, y_\lambda\in\mathcal{D}(A)\cap\mathcal{D}(B)$, tale che

$$L(|\lambda|^{-1},x,y_\lambda) < M_1+1.$$

Allora,

$$\|p^{-1}(\lambda^2+\lambda B)x-x\|_X \leq \|p^{-1}(\lambda)(\lambda^2+\lambda B)(x-y_\lambda)\|_X + \|y_\lambda-x\|_X + \|p^{-1}(\lambda)Ay_\lambda\|_X$$
$$\leq (M_1+1)\,(3M+1)\,|\lambda|^{-1}.$$

Dal principio della limitatezza uniforme segue allora la stima richiesta.

Osservo che la condizione (4) è soddisfatta se V è uno spazio di interpolazione reale del tipo $(\mathcal{D}(A)\cap\mathcal{D}(B),X)_{\alpha,p}$, $\forall\alpha\in\,]0,\frac{1}{2}]$ e $\forall p\in[1,+\infty]$ oppure $(\mathcal{D}(A)\cap\mathcal{D}(B),X)_\alpha$, $\forall\alpha\in\,]0,\frac{1}{2}]$.

Il teorema precedente consente un'immediata applicazione, nel caso parabolico, cioè se Σ contiene un settore centrato sul semiasse reale positivo di semiampiezza maggiore di $\frac{\pi}{2}$. In tal modo si possono riottenere, scegliendo $V = \mathcal{D}(B)$ i risultati di [7].

Ovviamente più difficoltosa e ancora in fase di studio è l'applicazione al caso non parabolico.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. AGMON-L. NIRENBERG: Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach spaces, Comm. Pure Appl. Math., 16 (1963), 121-239.

[2] H.O. FATTORINI: Second order linear differential equations in Banach spaces, North-Holland (1985).

[3] P. GRISVARD: Equations différentielles abstraites, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., (4) 2 (1969), 311-395.

[4] J. KISYNSKI: On cosine operator functions and one-parameter groups of operators, Studia Math., 44 (1972), 93-105.

[5] J. LAGNESE: On equations of evolution and parabolic equations of higher order in t, J. Math. Anal. Appl., 32 (1970), 15-37.

[6] F. NEUBRANDER: Integrated semigroups and their application to complete second order Cauchy problems, Semigroup Form, 38 (1989), 233-251.

[7] E. OBRECHT: The Cauchy problem for time-dependent abstract parabolic equations of higher order, J. Math. Anal. Appl., 125 (1987), 508-530.

[8] E. OBRECHT: Phase space for an n-th order differential equation in Banach spaces, in corso di stampa in Proc. of a Conference on Semigroups held in Delft, September 1989.

[9] M. WATANABE: Cosine families of operators and applications, in "Differential equations in Banach spaces", Proc. of a conference held in Bologna, July 2-5, 1985, Springer Lecture Notes in Math. n. 1223 (1986).

[10] S. Ya. YABUBOV: A nonlocal boundary value problem for a class of Petrovskii well-posed equations, Math. USSR-Sb., 46 (1982), 255-265.